

Errores aritméticos en estudiantes de reciente ingreso a la educación universitaria

Arithmetic errors in students of recent admission to university education

✉ **Andrés Felipe Muñoz Tello**

andres.munoz00@usc.edu.co

<https://orcid.org/0000-0001-7854-4575>

Universidad Santiago de Cali, Cali, Colombia

✉ **Yesica Yarima Jiménez Benavides**

yesica.jimenez00@usc.edu.co

<https://orcid.org/0000-0002-8134-8185>

Universidad Santiago de Cali, Cali, Colombia

✉ **Celimo Alexander Peña Rengifo**

celimo.pena00@usc.edu.co

<https://orcid.org/0000-0002-9643-0798>

Universidad Santiago de Cali, Colombia

| Artículo recibido en mayo 2022 | Arbitrado en junio 2022 | Aceptado en julio 2022 | Publicado en septiembre 2022

RESUMEN

Palabras clave:

Proceso de aprendizaje;
dificultad en el
aprendizaje;
responsabilidad; e
ducación universitaria;
aritmética

En el campo de la educación matemática, suponer que todos los que inician estudios universitarios, tienen conocimientos y capacidades similares, promueve el desarrollo de prácticas pedagógicas equivocadas, que producen pobres resultados académicos y frustraciones. Este documento muestra una investigación de diseño mixto, que expone una clasificación y sistematización de elementos teóricos relacionados al concepto de error aritmético. Para luego aplicar esto, en una variedad de errores operacionales efectuados sobre números enteros y racionales, por estudiantes recién admitidos en la universidad.

ABSTRACT

Keywords:

Learning process;
difficulty in learning;
responsibility; universi-
ty education arithmetic

In the field of math education, assuming that all those who begin university studies have similar knowledge and abilities, promotes the development of wrong pedagogical practices, which produce poor academic results and frustrations. This document shows a mixed design investigation, which exposes a classification and systematization of theoretical elements related to the concept of arithmetic error. To then apply this, to a variety of operational errors made on integers and rational numbers, by freshmen in college.



INTRODUCCIÓN

En general, los estudiantes que se enfrentan a un curso de Matemáticas Básicas en la universidad traen consigo conceptos de aritmética aprendidos durante su paso por la educación primaria, secundaria y media. Esto generará inconvenientes, si estos conceptos no fueron bien comprendidos, están distorsionados u olvidados. Por tanto, la presencia de estos errores, dificultades y obstáculos, es inevitable y no se debe tomar como una desatención o ignorancia, y debería ser atendido por el docente o guía, independientemente del nivel en el que se detecte. Tomando en cuenta esta problemática, este documento se desarrolló a partir de una investigación centrada en los errores, y en menor medida en las dificultades y obstáculos, que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes de ingreso reciente a la universidad. Con esto en mente, realizamos una clasificación de elementos teóricos, entrevistas a profesores encargados de los cursos de Razonamiento Cuantitativo y aplicamos una prueba diagnóstica a una muestra de estudiantes con sólo un mes de estudios en la Universidad Santiago de Cali. Todo considerando que en los procesos de aprendizaje intervienen e interactúan elementos como: el saber matemático, el docente y el estudiante.

Esta investigación, tuvo en cuenta lo mencionado por la OCDE (2016), sobre las falencias de formación de los estudiantes que ingresan a la educación superior en Colombia. Adicionalmente, que no se cuenta con una política clara de orientación para los estudiantes respecto a la educación superior

y a las oportunidades del mercado laboral Nieto y Olivera (2012). Además, de que estas precariedades académicas y desorientación, llevan a que en Colombia los estudiantes basen su elección de carrera en fuentes informales, como parientes o amigos, lo que limita sus posibilidades frente a los cursos de un programa universitario, produciendo malestar, incomodidad, errores e incluso deserciones tempranas. Pero como afirma Restrepo (1975) los profesores universitarios no debemos quedar en quejarnos en la mala preparación de los bachilleres y mirar por encima del hombro a los profesores de secundaria, ya que “los profesores de primaria, secundaria y de universidad enfrentamos problemas pedagógicos comunes, con las debidas diferencias según los niveles” (p. 306).

Sobre el error, Godino et al. (2003) expresa: “Hablamos de error cuando el estudiante realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar”. (p. 69). Por otro lado, la dificultad se trata como aquella falta de conocimientos, en nuestro caso de las matemáticas, que posee un estudiante y que es motivo de error. Sobre ello, Socas (1997), Di Blasi (2003) y Friz et al. (2009), manifiestan que las dificultades del aprendizaje, tienen distintas raíces generalmente situadas en un pequeño marco educativo: Alumno, curso, profesor e institución educativa, que van desde una deficiente planificación curricular y procesos lingüísticos, hasta la naturaleza propia de las Matemáticas. Esto difiere de los obstáculos, que según Brousseau (1986) son en sí un conocimiento y no una falta de ellos, aunque dicho conocimiento ha sido útil en

otro contexto.

Por tanto, de acuerdo con Cadenas (2007) encontrar y clasificar errores, nos permitirá retomar los contenidos, logrando que los estudiantes intenten superar sus dificultades y obstáculos para lograr nuevos aprendizajes, y se complementa con Engler et al. (2004) sobre que los errores son fuente inagotable de conocimientos y que podemos intentar que los mismos se constituyan en un elemento motivador importante. Esto sin dejar de lado, lo mencionado en Muñoz y Peña (2020) sobre la existencia de situaciones la disyuntiva entre hacer y saber hacer lo que produce choques entre la estructura matemática formal y técnicas pedagógicas que buscan la solución de problemas.

Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas

Históricamente en el desarrollo del estudio de los errores cometidos durante los procesos de aprendizaje, se han logrado diseñar diferentes taxonomías, con el fin de crear esquemas para su posterior exégesis; intentando mostrar la frecuencia en la cual aparecen los errores y algunas similitudes presentes en estos, sugiriendo que existen algunos aspectos principales que permiten llevar a cabo inferencias sobre los errores y las posibles causas de su aparición. Por ejemplo: Weiner, el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de errores, en 1922 trató de establecer patrones de errores que explicaran las equivocaciones individuales en todas las materias y para todos los grupos de edades escolares.

En esta dirección Radatz (1980), hizo las contribuciones más relevantes en el campo de investigación de los errores en el aprendizaje de las matemáticas hasta la década de los 70s, en la que aglomeró los estudios realizados por autores, como Brueckner (1935), determinando los objetivos a evaluar para el estudio de errores. En Bell (1986), se usaron lecciones con problemas críticos para descubrir concepciones erróneas, suscitando discusiones que conducían a una resolución, para después introducir problemas similares que eran útiles como retroalimentación para la corrección de los errores cometidos. Esto, condujo a observar el potencial que posee el error visto como instrumento educativo para la exploración diagnóstica. Basados en Abrate et al. (2006) y Gamboa et al. (2019), presentamos una clasificación de errores, en donde se presentan los elementos que los caracterizan y algunos de los investigadores quienes las han estudiado.

Tabla 1. Clasificación de errores

Errores debidos a	Producidos por	Investigadores relacionados y año	Elementos Característicos
Lenguaje matemático	Una traducción o interpretación incorrecta del lenguaje matemático realizado por parte de los estudiantes	<ul style="list-style-type: none"> Movshovitz-Hadar et al.(1987) Astolfi (1999) Lozada (2016) 	<ul style="list-style-type: none"> Traducir una expresión del lenguaje natural de un término matemático o una ecuación que representa una relación diferente a una descrita verbalmente. Designar un concepto matemático mediante un símbolo que tradicionalmente designa otro concepto y operar este con el símbolo en su uso convencional. Interpretar incorrectamente símbolos gráficos como términos matemáticos o viceversa.
Inferencias	Un consorcio entre un contenido matemático previamente establecido y los nuevos a adquirir	<ul style="list-style-type: none"> Radatz (1980) Abrate et al. (2006) 	<ul style="list-style-type: none"> Derivar la validez de lo que conoce respecto a otras situaciones inventar nuevas reglas a partir de conocimientos anteriores.
La recuperación de un esquema previo	La permanencia de ciertos aspectos en el contenido matemático, aunque la tarea matemática en cuestión se haya cambiado.	<ul style="list-style-type: none"> Davis (1984) Radatz (1980) 	<ul style="list-style-type: none"> Interacción incorrecta entre elementos singulares. Faltas en la lectura o escritura por mala asimilación. Rigidez y poca flexibilidad en la solución de situaciones matemáticas. Transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.
Técnicas o cálculos accidentales	Una serie de posibilidades, como distracciones o una toma de datos mal llevada, que ocasionan que el resultado del ejercicio difiera de la solución correcta.	<ul style="list-style-type: none"> Movshovitz-Hadar et al. (1987) Abrate et al.(2006) Franchi y Hernández (2004) 	<ul style="list-style-type: none"> Manipulación incorrecta de símbolos algebraicos elementales. Transferencia equivocada de símbolos y números involucrados en la situación. Interpretaciones erradas de tablas o gráficos.
Deficiencias en la construcción de conocimientos previos	Aprendizajes incorrectos o inadecuados de hechos, destrezas y conceptos previos que interfieren en un adecuado procesamiento de la información	<ul style="list-style-type: none"> Radatz (1980) Abrate et al. (2006) 	<ul style="list-style-type: none"> Conocimiento inadecuado de hechos básicos. Desconocimiento de los procedimientos para lograr una solución. Dominio insuficiente de símbolos y conceptos.
La ausencia de conocimientos	No poseer los conocimientos necesarios para la realización de una actividad establecida.	<ul style="list-style-type: none"> Abrate et al. (2006) 	<ul style="list-style-type: none"> Carencia de aprendizajes de hechos, destrezas y conceptos previos.

Nota: Elaboración propia

Esta tabla ratifica el trabajo de Escobar y Escobar (2015) quienes afirman que “Desde la perspectiva de la educación matemática ya no habría forma de pensar en el error como una simple equivocación, sino más bien como el uso no adecuado de un conocimiento previo” (p. 8) y de acuerdo con Yopez (2020) los errores, las dificultades y los obstáculos que poseen los estudiantes traen consigo la siguiente serie de consecuencias:

- Las bajísimas notas en las pruebas.
- La baja motivación de los estudiantes para postular en concursos de admisión a carreras relacionadas con matemáticas, principalmente ingenierías y ciencias económicas.
- Los estudiantes se conforman con terminar su educación básica secundaria, ponderan las actividades principales de sus progenitores como modelo a seguir (p. 80).

Esto muestra la importancia de desarrollar un estudio a nivel de educación superior, sobre el error, sin dejar de lado que la evolución histórica de las matemáticas y los diferentes problemas que causaron los números enteros y racionales, que según Herrera y Zapatera (2019), “se ve reflejado en el sistema educativo por medio de las distintas etapas en que está dividida la enseñanza” (p. 198) y que confirman Brown y Van Lehn (1980), y Rueda (2018), quienes afirman, la adición y sustracción de enteros o fracciones se han convertido en uno de los tópicos que más dificultades genera en los estudiantes.

MÉTODO

Esta investigación empleó un enfoque mixto, con aplicación de métodos empíricos de observación, experimentación y clasificación inicial de datos. En particular, implementaremos el diseño exploratorio de métodos secuenciales mixtos, basándonos en Meijer et al. (2001), desarrollando en una primera fase la recopilación de datos cualitativos a partir de entrevistas semiestructuradas, seguido de una segunda fase que consiste en desarrollar y probar un instrumento basado en sus datos cualitativos. A continuación, desarrollamos las dos fases.

En la fase cualitativa, se realizó una entrevista, para recabar información, observaciones y concepciones a seis profesores, quienes en su momento eran los responsables de los cursos de Razonamiento Cuantitativo en la Universidad Santiago de Cali. La entrevista, se dividió en tres temas:

- Dificultades.
- Obstáculos.
- Números racionales.

Las preguntas para esta entrevista fueron elaboradas a partir de los elementos teóricos introducidos anteriormente, y a través de los datos obtenidos de talleres, exámenes y demás actividades de cursos en semestres previos al del estudio.

En la fase cuantitativa, la entrevista sirvió de guía, para el diseño de una prueba diagnóstica en aritmética básica de números enteros y racionales, con el objetivo de observar los conocimientos previos con los cuales llegaban los estudiantes a la universidad. Esta prueba

se dividió en tres niveles: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. A continuación, se expone una tabla, con los ejercicios basados

en una adaptación a nuestro contexto, de los trabajos de Brown y VanLehn (1982), y de VanLehn (1990).

Tabla 2. Clasificación de errores

Nivel	Ejercicio propuesto	Contenido matemático
BÁSICO	1. $25+78$	Suma y resta con enteros
	2. $27-63$	
	3. 28×54	Multiplicación y división con enteros
	4. $84 \div 3$	
	5. $5-(-2)$	Operaciones con signos de agrupación
	6. $-52 \div (-4)$	
	7. $[(-4) \times 5]$	
	8. $-6+9 \div 3$	Combinación de operaciones con signos de agrupación
	9. $12-3 \times 8$	
	10. $-4-5(-6)$	
	11. $\frac{3+6}{3}$	Fracción
	12. $\frac{24}{2 \times 6}$	Exponentes
	13. $-(5)^0$	
	14. 2^3	
	15. $(-5)^3$	Suma y resta con racionales
16. $\frac{12+7}{5 \ 6}$		
17. $\frac{-3 \ 5}{4 \ 8}$		
18. $\frac{9}{12} \times \frac{-11}{12}$	Multiplicación y división con racionales	
19. $\frac{8}{5} \div \frac{-3}{9}$		
20. $\frac{-15}{7}$	Fracciones con numerador o denominador en Q	
21. $\frac{12}{9}$		
22. $\frac{12}{2}$		
22. $\frac{-2+6-4}{3+3}$	Fracción con resultado de la forma $\frac{0}{a}$	
23. $\frac{6+5}{7} - \frac{8}{7}$	Combinación de operaciones en racionales	
24. $\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)$	Combinación de operaciones en racionales, con signos de agrupación	
25. $\left(\frac{1}{5} - 2\right)^{-1}$	Exponente negativo con base racional	

AVANZADO	26. Falso o Verdadero:	Propiedad asociativa
	27. $(6 - 3) - 2 = 6 - (3 - 2)$	
	28. $(12 \div 6) \div 3 = 12 \div (6 \div 3)$	
	29. $(3-5)^2 = 3^2 - 5^2$	
	30. $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + 1}}}$	Operaciones entre enteros y racionales

Nota: Elaboración propia

La prueba se aplicó a una muestra heterogénea de 651 estudiantes de primer semestre, del periodo académico 2019-A (febrero-junio), quienes asistían a su primer mes del curso de Razonamiento Cuantitativo. El estudio fue llevado a cabo en dos sedes de la universidad, ubicadas en las ciudades de Cali y Palmira, ambas en el Valle del Cauca, Colombia. Se estableció que no era permitido utilizar calculadoras, ni algún tipo de aplicación en línea relacionada y se solicitó que fuesen honestos al momento de responder cada ítem de la prueba.

El tiempo asignado para la ejecución de la prueba fue de 120 minutos, desarrollándose en los salones y horarios habituales de clase. Esta fue accesible a través de un link suministrado a los estudiantes, se facilitaron teléfonos y computadoras para todo el que lo necesitó. Una vez terminada la prueba, se descargaron los resultados, se recibieron los cálculos hechos en papel. Dicha prueba, se implementó en un formulario de Microsoft, como se muestra a continuación:

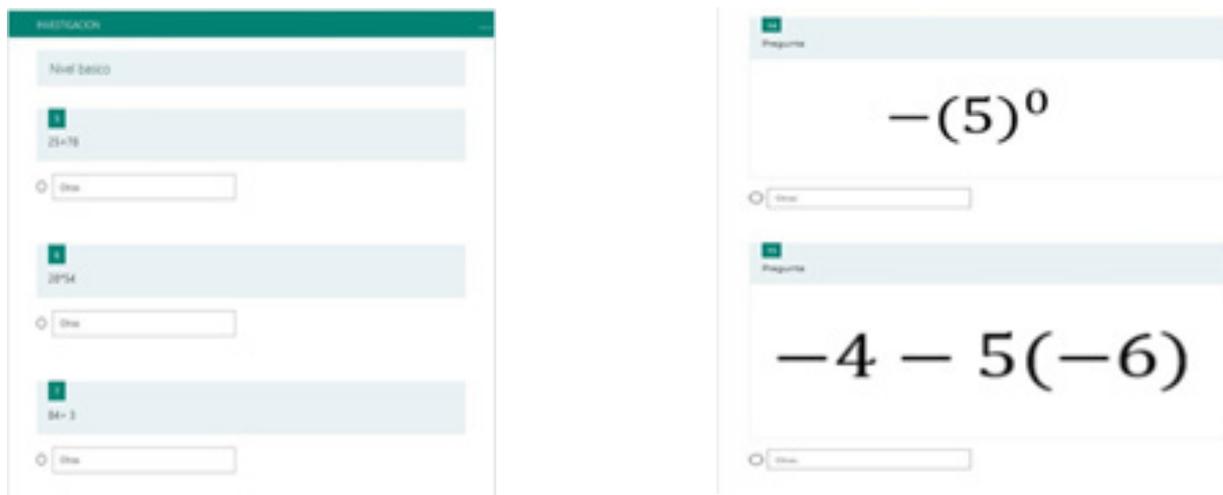


Figura 1. Prueba diagnóstica en línea.

Nota: Elaboración propia a partir del Software Microsoft Formas

Usando la herramienta filtros de Excel y tablas dinámicas se construyó una tabla por cada pregunta, comprendida por dos columnas, conformadas por la respuesta escrita por el estudiante y otra del número de veces

que se repitió esta respuesta en la muestra (frecuencia), posteriormente se hizo un análisis de cada una de las respuestas llegando al tipo de error que lo produjo, escribiendo en frente los tipos de errores que están inmersos, como lo muestra la figura.

Al preguntar 25+78 los encuestados respondieron		
102	8	CALCULO INCORRECTO
103	577	CORRECTA
113	16	DEFICIENCIA EN LA CONSTRUCCION
93	7	DEFICIENCIA EN LA CONSTRUCCION
105	3	DEFICIENCIA EN LA CONSTRUCCION
913	3	DEFICIENCIA EN LA CONSTRUCCION
108	3	DEFICIENCIA EN LA CONSTRUCCION
otro	24	DEFICIENCIA EN LA CONSTRUCCION
blanco	9	
no se	1	
ejercicios		
	frecuencia	
errores	64	
no se	1	
respuestas erroneas	65	

Figura 2. Respuestas sobre el resultado de 25+78.

Nota: Elaboración propia a partir del Software Excel

A las respuestas en la que los encuestados escribieron de forma diferente; por ejemplo: 4/2, 4 sobre dos y 2, se les agrupo en una sola respuesta, sumándose a una misma frecuencia. El caso, donde las respuestas erróneas tenían uno o dos en frecuencia, se los asoció en una respuesta llamada “otros” por su baja frecuencia, y luego se sumaba a aquellos errores producidos por deficiencia en la construcción del conocimiento. Para aquellas expresiones como “no sé”, “no recuerdo” entre otros, se filtró en una sola respuesta dando señal a errores debido a ausencia de conocimiento.

RESULTADOS

Al realizar la entrevista a seis profesores de los cursos de Razonamiento Cuantitativo, descubrimos que la mayoría de los entrevistados no tenían clara la diferencia entre los conceptos de dificultad y obstáculo. La explicación de los entrevistados, es que estos eran posgraduados en matemáticas puras, sin estudios en educación matemática. Esto no es extraño, para muchas de las universidades colombianas; puesto que, en el país existen muy pocas instituciones que gradúen profesionales especializados en educación matemática universitaria, y como lo menciona Gómez-Mulett (2018), “hace falta un jalonamiento por parte del Estado y de las instituciones de educación superior sobre este aspecto” (p. 138).

Luego, de explicar a los profesores la diferencia entre los conceptos, y aplicar el cuestionario; surgieron sorpresas, ya que pensábamos que las dificultades y obstáculos aritméticos se presentaban desde el tratamiento de los números racionales, por eso la entrevista se dividió en tres temas que incluían los racionales.

Pero los entrevistados nos mostraron, que los errores, dificultades y obstáculos, iniciaban desde el tratamiento de los números enteros. Esto condujo a tomar a los errores y a los enteros como temas a estudiar. Enseguida, mostramos las preguntas y respuestas brindadas por dos de los profesores, quienes según nosotros mejor representaron las respuestas de todos los entrevistados.

Tabla 3. Entrevista

Tema	Pregunta	Respuesta Profesor 1	Respuesta Profesor 2
Dificultades	Entendiendo como dificultad "noción de dificultad". ¿Cuál o cuáles son las mayores dificultades de los estudiantes de nuevo ingreso a cursos de matemática básica? ¿Por qué cree usted que es la mayor dificultad?	"Poca interiorización de los conocimientos. Dado que los conocimientos aprendidos en sus colegios en su mayoría no han sido conceptualizados en situaciones cotidianas que permitan al estudiante comprender dicho conocimiento."	"El estudiante no distingue la existencia de reglas como la jerarquía de las operaciones matemáticas. Esto ya que cree que se debe resolver de forma lineal."
	¿Cuál o cuáles son las dificultades más recurrentes en los estudiantes de nuevo ingreso a cursos de matemática básica?	"No recuerdan o reconocen el algoritmo de algunas operaciones matemática, como por ejemplo: las leyes de los exponentes."	"El de la jerarquía de las operaciones, es el que más se observa en las clases de matemáticas básicas."
	¿A qué atribuye estas dificultades?	"Se debe a que la mente no es segura cuando aprendemos conceptos por necesidad, sin aplicarlo en nuestro entorno. Entonces lo desechamos."	"A dos situaciones: Primera, el estudiante lo observo en su colegio y llegado acá ya no lo recuerda. Segunda: el estudiante no las aprendió."
	Una vez evidenciadas estas dificultades, ¿qué estrategias comúnmente usa usted para aportar en la superación de estas dificultades en sus estudiantes?	"Emprendo un recordatorio rápido de contenidos olvidados, se deja a criterio del estudiante superar los obstáculos con ayudas externas, como videos."	"Les enseño lo que no recuerdan o no aprendieron y que indudablemente van a necesitar para el buen desarrollo del curso."
Obstáculos	Entendiendo como obstáculo "noción de obstáculo". ¿Cuál o cuáles son los mayores obstáculos de los estudiantes de nuevo ingreso a cursos de matemática básica? ¿Por qué cree usted que es la mayor dificultad?	"Los mayores obstáculos son: El estudiante confunde las leyes de los signos. Por ejemplo: En la siguiente operación $-5 - 6$, reflejan la ley de signos de la multiplicación, obteniendo como respuesta $+11$."	"Aplicar la ley de signos para suma cuando está en multiplicación. Aplicar las propiedades de la suma en la resta, Por ejemplo: En la operación $34 - 40$, obtienen 6, dado a que toman el número mayor y le restan el menor."

Obstáculos	¿Cuál o cuáles son los obstáculos más recurrentes en los estudiantes de nuevo ingreso a cursos de matemática básica?	“El más recurrente es el que acabo de mencionar.”	“El más recurrente es cambiar el orden del minuendo y sustraendo y operan teniendo el minuendo mayor.”
	¿A qué atribuye estos obstáculos?	“A que el estudiante no comprendió el contenido matemático que está inmerso, falta de reflexión y contextualización.”	“A que el estudiante no comprende las propiedades de las operaciones matemáticas. Además, a la introducción de los números negativos, puesto que los estudiantes hacen inferencias incorrectas de ellos.”
	Una vez evidenciadas estas dificultades, ¿qué estrategias comúnmente usa usted para aportar en la superación de estos obstáculos en sus estudiantes?	“Por tiempos, lo que hago es ligeramente aclarar dudas, hacer recomendaciones de videos de retroalimentación de estos temas, ya que si corregimos todo, va a tomar mucho tiempo, afectando a los estudiantes que no presentan dicha situación.”	“En este caso corrijo el error cometido y planteo uno o dos ejercicios mas donde sea el mismo estudiante que se enfrente a la posibilidad de seguir cometiendo el error y logre identificarlo y no cometerlo.”
Números racionales	¿Cuáles son las dificultades más recurrentes y mayores que tienen los estudiantes de primer semestre en la operatividad de los numero racionales	“Ignoran frecuentemente la existencia de los algoritmos para las operaciones entre números racionales, lo que se evidencia cuando empiezan a realizar las divisiones, sin identificar que están pidiendo.”	“No comprenden el concepto de una fracción, en tanto que lo miran como dos números y no como una representación de uno.”
	¿Cuáles son los obstáculos más recurrentes y mayores que tienen los estudiantes de primer semestre en la operatividad de los numero racionales?	“Ellos toman el algoritmo del producto y lo aplican en una división de racionales. También, toman el algoritmo de la suma y lo aplican en una multiplicación de racionales.”	“El estudiante no tiene bien formalizado los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división de fracciones.”
	¿A qué atribuye las dificultades y obstáculos en la operatividad de números racionales?	“Esto se debe a que el estudiante no ha interiorizado que algoritmo aplicar para cada operación entre racionales.”	“Esto se debe a que el paso de números enteros a números racionales no ha sido bien interiorizado.”
	¿Qué implicación tienen para los estudiantes estas dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas superiores en su carrera profesional?	“Esto hace que los estudiantes tengan fobia a las matemáticas. Dudan de sus capacidades. No logran identificar el sentido de aprender y consideran esta área superflua en sus estudios.”	“Frena el ritmo de los cursos, ya que los docentes de esos cursos titubean entre seguir adelante, afectando a los que tienen dificultades, o parar, afectando a los que no las tienen.”
	¿Cuáles son las estrategias que usted promueve para superar estas dificultades u obstáculos?	“Hacer caer en el error al estudiante y que reconozca el mismo el error, para que lo lleve con él y lo aplique cuando se presente en otra situación.”	“Es difícil superar esto, justo en las horas de clase, en lo personal, me apoyo mucho enviando link de videos de cada contenido.”

Nota: Elaboración propia

Aquí, hallamos que los errores mencionados por los profesores, se derivan de la secundaria y de la formación media, que aún persisten en los cursos universitarios, ya que se mencionan métodos y estrategias inventadas, para la realización de algunas de las situaciones propuestas, tal como se describe en Puchulu (2009). Esto aportó elementos necesarios en la construcción del instrumento, con el cual pudimos recoger los datos cuantitativos necesarios en nuestra investigación.

Posteriormente, a la aplicación del instrumento, se sistematizaron los datos obtenidos, describiendo la cantidad de ejercicios propuestos según su contenido, la cantidad de preguntas donde los estudiantes no poseen el conocimiento requerido para la respectiva resolución del ejercicio planteado, el total de preguntas con errores; así como la cantidad de ejercicios con respuesta correcta y aquellos que fueron dejadas en blanco. De igual manera, se llevó a cabo la relación entre ejercicios con respuesta y ejercicios con errores, como lo muestra la siguiente tabla.

Tabla 4. Sistematización de los resultados por niveles

Nivel	Ejercicios propuestos	Cantidad de ejercicios	Cantidad de ejercicios sin respuestas (N.S)	Ejercicios con respuestas erróneas excluyendo las (N.S)	Total, respuestas con errores	Ejercicios con respuestas correctas	Total de respuestas	Ejercicios en blanco	Porcentaje aproximado de ejercicios con errores	Porcentaje aproximado de errores por ejercicio		
										Ejercicios		
									1	2	3	
Básico	Suma y restas con enteros	2	9	467	476	793	1269	33	38%	10%	66%	
	Multiplicación y división con enteros	2	33	281	314	924	1238	64	25%	28%	23%	
	Operaciones con signos de agrupación	3	270	565	835	927	1762	191	47%	48%	54%	40%
	Fracción	2	85	223	308	893	1201	101	26%	16%	35%	
	Combinación de operaciones	2	51	919	970	258	1228	74	79%	78%	80%	
	Combinación de operaciones con signo de agrupación	1	56	470	526	74	600	51	88%	88%		
	Exponentes	3	188	879	1067	737	1804	149	59%	94%	33%	52%
	Total	15	692	3804	4496	4606	9102	663				

Nivel	Ejercicios propuestos	Cantidad de ejercicios	Cantidad de ejercicios sin respuestas (N.S)	Ejercicios con respuestas erróneas excluyendo las (N.S)	Total, respuestas con errores	Ejercicios con respuestas correctas	Total de respuestas	Ejercicios en blanco	Porcentaje aproximado de ejercicios con errores	Porcentaje aproximado de errores por ejercicio		
										Ejercicios		
									1	2	3	
Medio	Suma y resta con racionales	2	154	769	923	210	1133	169	81%	76%	87%	
	Multipliación y división con racionales	2	373	518	891	144	1035	267	86%	84	89	
	Fracción con numerador y denominador en Q	2	316	510	826	223	1049	253	79%	76%	82%	
	Fracción con resultado de la forma 0/a	1	90	312	402	130	532	119	76%	76%		
	Combinación de operaciones en Racionales	1	229	202	431	64	495	156	87%	87%		
	Combinación de operaciones en racionales, con signos de agrupación	1	238	207	445	44	489	162	91%	91%		
	Exponente negativo con base racional	1	242	223	465	9	474	177	98%	98%		
	Total	10	1642	2741	4383	824	5207	1303				
Avanzado	Propiedad asociativa	3	0	708	708	1048	1756	197	40%	33%	34%	54%
	Operación entre entero y racional	1	229	177	476	11	487	164	98%	98%		
	Total	4	299	885	1184	1059	2243	361				

Nota: Elaboración propia

Luego, de sistematizar los datos, se correlacionaron las respuestas, las categorías de errores y las conclusiones tomadas de las nociones teóricas presentadas en las dos primeras secciones. Esta fase, tuvo en cuenta los procedimientos realizados

por algunos estudiantes, los comentarios de estos durante la aplicación de la prueba, y la bibliografía introducida hasta el momento. A continuación, mostramos la sistematización de los resultados por categoría de error.

Tabla 5. Errores por categoría

Nivel	Ejercicios propuestos	Categorización de errores						Total	
		Cantidad de ejercicios	E Errores debido al lenguaje matemático	Errores debido a inferencias o asociaciones incorrectas	Errores debido a recuperación de un esquema previo	Errores debido a cálculos incorrectos o accidentales	Errores debido a deficiencia en la construcción de conocimiento		Errores debido a la ausencia de conocimientos previos
Básico	Suma y restas con enteros	2	0	307	49	8	114	9	487
	Multiplicación y división con enteros	2	35	0	0	46	65	33	179
	Operaciones con signos de agrupación	3	29	230	170	19	23	270	741
	Fracción	2	63	6	0	27	73	85	254
	Combinación de operaciones	2	10	232	664	74	24	51	1055
	Combinación de operaciones con signo de agrupación	1	250	293	382	3	26	56	1010
	Exponente	3	242	502	0	0	87	188	1019
Total	15	629	1570	1265	177	412	692	4745	
Medio	Suma y resta con racionales	2	0	383	65	28	121	154	751
	Multiplicación y división con racionales	2	0	59	128	3	57	373	620
	Fracción con numerador y denominador en Q	2	29	161	0	0	104	316	610
	Fracción con resultado de la forma 0/a	1	33	108	95	40	29	90	395
	Combinación de operaciones en Racionales	1	0	3	29	0	57	229	318
	Combinación de operaciones en racionales, con signos de agrupación	1	12	40	12	0	21	238	323
	Exponente negativo con base racional	1	0	66	13	3	72	242	396
Total	10	74	820	342	74	461	1642	3413	
Avanzado	Propiedad asociativa	3	0	0	708	0	0	0	708
	Operación entre entero y racional	1	0	0	0	0	156	299	455
	Total	4	0	0	708	0	156	299	1163

Nota: Elaboración propia

El análisis de errores por categoría de respuestas erróneas desde su causa, muestra mayor influencia de errores por ausencia de conocimientos previos, obteniendo aproximadamente 28.25% del total de errores, lo que se suma a la alta cantidad de preguntas en blanco, 12.33% (ver Tabla 4).

La Tabla 5, presenta de errores de inferencia o asociación incorrecta y recuperación de un esquema previo con el 25.64% y 24.83% respectivamente. La sencillez de los ejercicios propuestos, hicieron que el porcentaje de los errores procedentes de cálculos incorrectos o accidentales fuera el más bajo, con cerca del 2.69%.

Estos no están aislados de resultados de otras investigaciones, ya que Abrate et al. (2006), obtuvo que las categorías más frecuentes eran las que ocurren por inferencia y recuperación de esquemas previos.

Para las operaciones suma y resta enteros, los errores más frecuentes se presentaron por inferencia o asociación incorrecta, con un 63.04%. En segundo escalón, con 23.41%, aparecieron aquellos debido a deficiencia en la construcción de conocimientos, ya que no se desarrolló correctamente el algoritmo para la suma de números positivos y negativos, como muestra la siguiente captura.

$$\begin{array}{r} 4. \quad 27 - 63 \\ \hline 27 \\ - 63 \\ \hline \boxed{44} \end{array}$$

Figura 3. Resta de enteros

Nota: Resultado prueba diagnóstica

Respecto de la multiplicación y división de enteros, aparecieron en mayor proporción errores de deficiencia en la construcción de conocimientos, con 36.31%. Esto debido a que

el algoritmo de la multiplicación y división no fue bien ejecutado. La dificultad debido al lenguaje matemático, no se queda atrás con el 19.55%, ya que como lo muestra la siguiente imagen, no se aplican los algoritmos correctos

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 54 \\ \hline 82 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84 \overline{) 27} \\ \underline{24} \\ 30 \end{array}$$

Figura 4. Multiplicación y división de enteros

Nota: Resultado prueba diagnóstica

En cuanto a ejercicios de combinación de operaciones en enteros, fue alto el error debido a recuperación de un esquema previo, con el 62.94%. Aquí observamos, que se aplica

incorrectamente la ley de signos, ya que recuperan el esquema de una situación de suma o resta; en el contexto de una multiplicación o división y viceversa, como se muestra en la figura.

Figura 5. Combinación de operaciones en enteros

Nota: Resultado prueba diagnóstica

En los ejercicios, con enteros, en los cuales se propuso una combinación de operaciones, con signos de agrupación, se evidenciaron errores debido a la recuperación de un esquema previo, con cerca del 37.82%, y la presencia de errores debido al lenguaje

matemático e inferencia o asociación incorrecta que sumaron el 53.73%, lo que nos muestra que los evaluados omiten el signo de agrupación e infieren que es equivalente tenerlo o no, como muestra la figura.

Figura 6. Operaciones con signos de agrupación en enteros

Nota: Resultado prueba diagnóstica

El nivel básico, cerró con potencias de base y exponente enteros, aquí no se presentaron errores de recuperación de esquema previo, ni de cálculo incorrecto o accidental.

Pero, al indagar en la Tabla 4, el ejercicio del exponente cero, fue el de mayor frecuencia de error en todo el primer nivel, con el 94%, como muestra la figura.

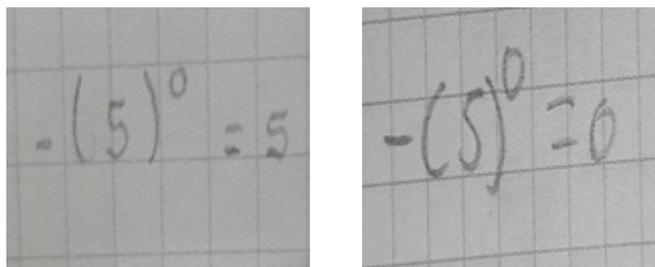


Figura 7. Exponente cero

Nota: Resultado prueba diagnóstica

En el nivel medio, las operaciones básicas con signos de agrupación sobre números racionales, predominaron los errores derivados de una ausencia de conocimientos previos con 73.68%, incluyendo el grupo de aquellos estudiantes evaluados que respondieron “no sé”.

También, se destacan los errores por ausencia de conocimientos, con el 51.80% y los del lenguaje matemático, cercano al 4.75%, ya que los evaluados asumieron que simplificar una fracción consiste en sumar, restar o multiplicar el numerador con el denominador, como se muestra a continuación.

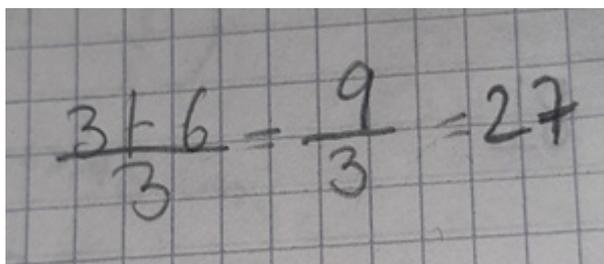


Figura 7. Expresión racional

Nota: Resultado prueba diagnóstica

En cuanto a las combinaciones de operaciones con ó sin signos de agrupación y a los ejercicios propuestos exponente negativo y base racional, se observó la aparición de errores asociados a la ausencia de conocimientos previos, con valores del 72.01%, 73.68% y 61.11% respectivamente.

En el nivel avanzado, el total de errores de aplicar la propiedad asociativa se relacionaron con la recuperación del esquema previo.

La mayoría de errores en la operación de enteros y racionales se repartió entre los errores debidos a deficiencia en la construcción de conocimiento con cerca del 34.29% y los errores por ausencia de conocimientos previos con el 65.71%.

Observando la propiedad asociativa en la Tabla 4, el error en las dos primeras preguntas es en promedio del 35%, mientras que en la tercera este se dispara al 54%, mostrando el

poco manejo que se tiene de las propiedades de potencias. En las operaciones de enteros y racionales el único ejercicio en cuestión, reveló 98% de errores, haciendo evidente el bajo nivel a la hora de aplicar correctamente algoritmos y propiedades de los enteros y racionales. Esta pregunta, comparte el primer puesto en la Tabla 4, junto al ejercicio de exponente negativo con base racional.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los hallazgos, concluimos que el total de los estudiantes que participaron en la prueba cometieron algún tipo de error. La presente investigación llama a la transformación de la concepción de error como indicador para sanciones, a una alarma que conlleva a replantear los procesos de enseñanza en búsqueda de tratar las dificultades y los obstáculos que originan la presencia de dichos errores.

De la entrevista, se evidenció que las concepciones de los profesores entrevistados están en correspondencia con lo señalado por Brousseau (1986), Davis (1984), Abrate et al. (2006) y Puchulu (2009) en sus investigaciones. Consideramos particularmente conveniente ahondar al respecto de la introducción de la regla de los signos en la multiplicación, ya que esta es introducida como una convención arbitraria para preservar el formalismo del cálculo, lo cual el estudiante memoriza, generando obstáculos y dificultades para recordar y aplicar debidamente esta ley.

Por otra parte, la concepción de que los errores se solucionan con explicaciones de lo mismo, hace que el estudiante “sea engañado”, ya que en su momento crea que entienda el

algoritmo y que lo comprende porque sabe de dónde sale cada proceso matemático, pero en realidad se necesita más que eso, comprenderlo es reconocer qué propiedades matemáticas o qué rutas puedo emprender para abordarlo y después como aplicarlo en situaciones que reflejen su cotidianidad. Por tanto, estamos de acuerdo con Del Puerto et al. (2006) sobre que “el conocimiento nuevo no se agrega al antiguo, sino que lucha contra él y provoca una nueva estructuración del conocimiento total” (p. 3).

En la prueba diagnóstica, observamos mayor cantidad de errores producidos por la ausencia de conocimientos previos; lo que privó de dar una respuesta a los ejercicios, expresando no saber o no recordar los contenidos temáticos involucrados, inferencia o asociación incorrecta y recuperación de un esquema previo. Al organizar y contabilizar los datos obtenidos, observamos que los errores procedentes de cálculos incorrectos o accidentales fueron los menos frecuentes, lo cual coincide con lo descrito por Abrate et al. (2006).

También, concluimos que las dificultades u obstáculos que condujeron a errores en la prueba afloraron de la memorización de algoritmos o prácticas sin conceptualización teórica, recurriendo a reglas poco trascendentes como requisitos necesarios para la realización de cálculos aritméticos. Así, estamos de acuerdo con Tettay-Mejía et al. (2019), sobre que “los estudiantes recurren a utilizar la operación cognitiva que habitualmente usan, la cual no es adecuada para dar solución a los problemas que están abordando” (p. 204).

Finalmente, no reconocer la presencia del error en cada uno de los procesos de aprendizaje, produce complicaciones futuras. Es así, que los errores, pueden llegar a afectar el rendimiento académico del estudiante, produciendo aspiraciones frustradas, bajos desempeños y que muy pocos estudiantes quieran seguir con una formación académica superior a un pregrado, por el temor a enfrentarse a niveles más avanzados de las matemáticas.

REFERENCIAS

- Abrate, R., Pochulu, M. D., y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. Universidad Nacional de Villa María
- Astolfi, J. (1999). El error, un medio para enseñar. Diada Editora
- Brousseau, G., Davis, R. B. y Werner, T. (1986). Observing students at work. En Christiansen B., Howson A.G., y Otte M. (eds) Perspectives on mathematics education (pp. 205-241). Mathematics Education Library, vol. 2. Springer, Dordrecht
- Brown, J., y VanLehn, K. (1980). Repair Theory: A Generative Theory of bugs in Procedural Skills. *Cognitive Science*, 4(4), 379-426
- Brown J., y VanLehn K. (1982). Towards a generative Theory of "Bugs". En Carpenter T., Moser J., Romberg T., (Edt.s). *Addition and Subtraction* (pp.117-135). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Brueckner, L. (1935). Techniques of Diagnosis. En *Educational Diagnosis, the Thirty fourth Yearbook of the National Society for the Study of Education* (pp. 131-153). Public School Publishing Company
- Cadenas, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la escuela de educación de la Universidad de los Andes. *Revista Orbis*, 2(6), 68-84
- Davis R. (1984). *Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Croom Helm
- Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., y Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana De Educación*, 38(4), 1-13. <https://doi.org/10.35362/rie3842646>

- Di Blasi Regner, M. (diciembre 2003). Dificultades y Errores: Un estudio de caso [Comunicación breve]. II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería, Buenos Aires
- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, 6(23), 23-32
- Escobar, A., y Escobar, B. (2015). El error en el uso de los números racionales e irracionales, como evidencia de obstáculo epistemológico, en estudiantes del grado noveno [Tesis de Maestría, Universidad de Medellín]. <http://funes.uniandes.edu.co/11430/1/Escobar2015El.pdf>
- Franchi, L., y Hernández, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, 8(24), 63-71
- Friz, M., Sanhueza, S., y Sánchez, A. (2009). Conocimiento que poseen los estudiantes de pedagogía en Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas (DAM). *Estudios pedagógicos*, 35(1), p. 47-62
- Gamboa, R., Castillo, M., y Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 19(1), 104-136
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Gómez-Mulett, A. S. (2018). La educación matemática en Colombia: origen, avance y despegue. *Fides et Ratio - Revista de Difusión cultural y científica de la Universidad La Salle en Bolivia*, 16(16), 123-146
- Herrera, J.L., y Zapatera, A. (2019). El número como cantidad física y concreta un obstáculo en el aprendizaje de los números enteros. *PNA*, 13(4), 197-220. <https://doi.org/10.30827/pna.v13i4.8226>
- Lozada, N. (2016). Errores en el entendimiento y uso del lenguaje matemático, en estudiantes de ingeniería. ProQuest Dissertations Publishing
- Meijer, P. C., Verloop, N., y Beijaard, D. (2001). Similarities and differences in teachers' practical knowledge about teaching reading comprehension. *Journal of Educational Research*, 94(3), 171-184
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, 18(1), 3-14
- Muñoz-Tello, A., y Peña, C. (2020). Experiencias significativas del centro de apoyo matemático Universidad Santiago de Cali. En Marín-Altamirano, C. (Ed. Científica). *Centros de escritura universitarios: Una estrategia para la permanencia estudiantil* (pp. 201- 227). Editorial Universidad Santiago de Cali
- Nieto, S., y Olivera M. (2012), Making reform happen in Colombia: The process of regional transfer reform. OECD Development Centre Working Papers, No. 309, OECD Publishing
- OCDE. (2016). Revisión de políticas nacionales de educación: La educación en Colombia. OECD Publishing
- Pochulu, M. D. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Colección Digital Eudoxus
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16-20

- Restrepo, G. (1975). Marco conceptual para el desarrollo de las matemáticas en Colombia. *Boletín de Matemáticas*, IX(4-6), 298-309
- Rueda, N. (2018). Algunas dificultades que presentan los estudiantes de séptimo para sumar y restar fracciones. Una mirada desde la modelación Matemática [Tesis de maestría, Universidad Nacional De Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/64081>
- Socas, M. (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Cap. V, 125-154. Barcelona: Horsori
- Tettay-Mejía, S. I., Pulgar-García, M., y Rojas-Sandoval, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. *Praxis*, 15(2), 193–205
- VanLehn, K. (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass: MIT Press
- Yepez, E. (2020). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes del 5° grado de educación secundaria de la Institución Educativa N° 501367 Inmaculada Concepción. Espinar-Cusco. Periodo 2018 [Tesis pregrado, Universidad Nacional De San Antonio Abad Del Cusco].
<http://repositorio.unsaac.edu.pe/bitstream/>